KAREKÖKLÜ SAYILAR

Rasyonel sayılar kümesi sayı ekseninde sık olmasına rağmen sayı eksenini tam dolduramamaktadır;çünkü sayı doğrusu üzerinde görüntüsü olduğu halde rasyonel olmayan sayılar da vardır.
Karesi 2 olan c doğal sayısını ele alalım.

a^2 **=** 2 ise a sayısını a **=** $\sqrt{2}$ şeklinde gösterebilir ve ‘karekök iki ‘diye okuyabiliriz.Acaba bu $\sqrt{2}$ sayısı hangi sayılar arasındadır?Bunu inceleyelim:
1^2 **=**1$\times$ 1**=**1
$(1,5)^2$ = 1,5$\times$ 1,5**=**2.25 tir
O halde $\sqrt{2}$ sayısı;1< $\sqrt{2}$ <1,5
Buna göre $\sqrt{2}$ sayısı 1 ile 1,5 arasındadır,sayı doğrusu üzerinde görüntüsü olduğu halde rasyonel sayı değildir;çünkü iki tam sayının bölümü şeklinde yazılamaz.
İşte sayı ekseni üzerinde görüntüsü olduğu halde,rasyonel olmayan $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, π ,… gibi sayılara **irrasyonel(rasyonel olmayan) sayılar** denir.I ile gösterilir.
İrrasyonel sayılar kümesi ile rasyonel sayılar kümesinin birleşim kümesinin birleşim kümesine de **reel (gerçek) sayılar denir.**

R**=**Q $\cup$ I   Q $\cap$ **I** =O
N$\subset$ Z$\subset$ Q $\subset$R   I $\subset$R

R^+**=**Pozitif reel sayılar
R^-**=**Negatif reel sayılar
R**=** R^- $\cup$ **{0}** $\cup$ R^+

Reel sayılar sayı eksenini tamamen doldurur.Sayı doğrusunda her noktaya bir reel sayı karşı gelir,yani sayı doğrusu ile reel sayılar kümesi bire bir eşlenebilir.

a bir pozitif reel sayı olmak üzere; $\sqrt{a}$ **=** b ifadesine **kareköklü ifade** denir.

a bir gerçek(reel) sayı ve **m** ,1 den büyük bir tamsayı ise $\sqrt[m]{a}$ sayısına ,a sayısının **m** inci **kuvvetten kökü** denir.**m** sayısına da **kökün derecesi** denir.

$\sqrt{a}$ da, kök derecesi 2 dir.
$\sqrt[m]{a}$ sayısının reel sayı olup olmama durumlarını inceleyelim:
■**m**, pozitif tek tamsayı ve **a** $\in$ R ise $\sqrt[m]{a}$ sayısı bir reel sayıdır.
$\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{-2}$, $\sqrt[7]{-64}$ reel sayılardır.

■ m,pozitif çift tamsayı ve a $\in$ R^+ ise $\sqrt[m]{a}$ sayısı bir reel sayıdır.
$\sqrt{5}$, $\sqrt[4]{12}$, $\sqrt[6]{2}$ reel sayılardır.

■ m pozitif çift tamsayı ve a $\in$ R^- ise $\sqrt[m]{a}$ sayısı bir reel sayı değildir.
$\sqrt{-4}$, $\sqrt[4]{-1}$, $\sqrt[6]{-3}$ reel sayılar değildir.

NOT: $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-4}$, $\sqrt{-9}$ sayıları reel sayı değildir ;çünkü hiçbir reel sayının karesi –1,-4 ve –9 değildir.

	25
$\sqrt{625}$	2 $\times$ 2 **=**45
-4	5
225	$\times$
	225

	48,4
$\sqrt{2345}$	4 $\times$ **2=**88
-16	$\times$ 8
	704
745	48 x 2=964
-704	$\times$ 4
4100	5856

KAREKÖK İÇİNDEKİ İFADENİN KÖK DIŞINA ÇIKARILMASI

Karekök içinde çarpım veya bölüm durumunda verilen ifadeler 2 veya 2 nin katı kuvvetinde yazılabilirse karekök dışına çıkarılabilirler.

$a \in R^+$,m $\in$ Z ise $\sqrt{a}^{\,2m}$ = $a^{2m/2}$ = a^m

a,b $\in$ R^+ ve b ≠ 0 ise $\sqrt{a}^{\,2}.b^2$ = a.b $\sqrt{a}^{\,2}/b^2$ = a/b dir.

a,b $\in$ R^+ ve $n \in Z$ olmak üzere ; $\sqrt{a}^{\,2n}.b = a^n.\sqrt{b}$

Örnekler:

$\sqrt{4} = \sqrt{2}^{\,2} = 2^{2/2} = 2$

$\sqrt{3}^{\,10} = 3^{10/2} = 3^5 = 243$

$\sqrt{7}^{\,4}/5^8 = \sqrt{7}^{\,2.2}/5^{2.4} = 7^2/5^4$

$a \in R$ için, $\sqrt{a}^{\,2} = |a|$

$\sqrt{(-3)}^{\,2} = \sqrt{9} = \sqrt{3}^{\,2} = 3$

KAREKÖKLÜ BİR SAYIYI $a\sqrt{b}$ ŞEKLİNDE YAZMAK :

$\sqrt{48}$ işleminin sonucu kaçtır?

48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

$\sqrt{48} = \sqrt{2}^{\,2}.2^2.3$

$= 2.2\sqrt{3}$

$= 4\sqrt{3}$

$3\sqrt{504}$ işleminin sonucu kaçtır?

504	2
252	2
126	2
63	3
21	3
7	7
1	

$3\sqrt{504} = 3\sqrt{2}^{\,2}.2.3^2.7$

$= 3.2.3.\sqrt{2.7}$

$= 18\sqrt{14}$

UYARI:Karekök dışına çıkarılan sayılar kökün önünde bulunan sayı ile çarpılarak yazılır.

KAREKÖK DIŞINDAKİ ÇARPANIN KÖK İÇİNE ALINMASI

Kareköklü bir sayının katsayısını kök içine almakiçin katsayının karesini kök içindeki sayı ile çarpar,kök içine yazarız.

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a}^{\,2}.b$$

Örnek:

$2\sqrt{3} = \sqrt{2}^{\,2}.3 = \sqrt{4.3} = \sqrt{12}$

RASYONEL SAYILARIN KAREKÖKÜ

a,b $\in$ R^+ olmak üzere ,

$\sqrt{a/b} = \sqrt{a} / \sqrt{b}$

Örnekler:

$\sqrt{9/16} = \sqrt{9} / \sqrt{16} = \sqrt{3}^{2} / \sqrt{4}^{2} = \frac{3}{4}$

$\sqrt{50/72} = \sqrt{25/36} = \sqrt{5}^{2} / 6^{2} = \frac{5}{6}$

$\sqrt{1\frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \sqrt{5}^{2} / \sqrt{4}^{2} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$

UYARI:Tam sayılı olan kesirler birleşik kesire çevrilerek pay ve paydanın ayrı ayrı karekökleri alınır.

ONDALIK SAYILARIN KAREKÖKÜ

Ondalık sayıların virgülden sonraki basamak sayıları çift ise tam karekökleri olabalir:

Örnek:

$\sqrt{0.09} = \sqrt{\frac{9}{100}} = \frac{3}{10}$

$\sqrt{0.00000016} = \sqrt{\frac{16}{100000000}} = \frac{4}{10000}$

$\sqrt{2.5} = \sqrt{\frac{25}{10}} = 5 / \sqrt{10}$

NOT: $\sqrt{0.04}$ sayısının karekökünü pratik olarak şöyle alırız.Virgül yokmuş gibi kabul edersek, $\sqrt{4}$ =2 dir.Oaha sonra virgülden sonraki her iki basamk için bir basamak sayıyı virgülle sağdan sola doğru ayırırız.

$\sqrt{0.04}$ =0.2

Örnek:

$\sqrt{0.000009} = \sqrt{0.000009}$ =0,003

1 2 3

KAREKÖKLÜ SAYILARDA DÖRT İŞLEM

1)Toplama-Çıkarma

Kareköklü sayılarda toplama-çıkarma işlemi yapılırken karekök içindeki sayıların aynı olması veya aynı hale getirilmesi gerekir.Sonra ortak çarpan parantezine alınarak işlem yapılır.

$a\sqrt{x} + b\sqrt{x} - c\sqrt{x} = \sqrt{x}$ (a+b-c)

$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$

Örnekler:

- $2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + \sqrt{3}$ işleminin sonucu nedir?

$2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + \sqrt{3} = (2-5+1)\sqrt{3}$

$= -2\sqrt{3}$

- $2\sqrt{28} - 3\sqrt{6} + \sqrt{63} - \sqrt{24}$ işleminin sonucu nedir?

Kök içlerini aynı yapmaya çalışmalıyız.

$2\sqrt{4.7} - 3\sqrt{6} + \sqrt{9.7} - \sqrt{4.6} = 2.2\sqrt{7} - 3\sqrt{6} + 3\sqrt{7} - 2\sqrt{6}$
$= 4\sqrt{7} + 3\sqrt{7} - 3\sqrt{6} - 2\sqrt{6}$
$= 7\sqrt{7} - 5\sqrt{6}$

2)Çarpma
Körekök içinde verilen sayılar çarpılıp kök içine yazılır.Mümkünse kök dışına çıkarma işlemi yapılır.

a,b$\in R^+$ ise , $\sqrt{a}\,.\sqrt{b} = \sqrt{a.b}$; $\sqrt{a}\,.\sqrt{a} = \sqrt{a}^{\,2}$ =a ve $a\sqrt{x}\,.b\sqrt{y} = ab\sqrt{xy}$

Örnekler:
- $\sqrt{5}\,.\sqrt{3} = \sqrt{5.3} = \sqrt{15}$
- $\sqrt{3}\,.\sqrt{15} = \sqrt{45} = \sqrt{3.3.5} = 3\sqrt{5}$
- $2\sqrt{5}\,.3\sqrt{8} = (2.3)\sqrt{5.8}$
  $= 6\sqrt{40}$
  $= 6.\sqrt{2.2.10}$
  $= 12\sqrt{10}$

Kareköklü sayının n kuvveti kök içindeki sayının n kuvvetidir.
$(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2}$ $\quad (a\sqrt{x})^n = a^n \sqrt{x^n}$ (x >0)
Örnek:

$(\sqrt{5})^4 = \sqrt{5^4} = \sqrt{5.5.5.5} = 5.5 = 25$

NOT: $(\sqrt{a} + \sqrt{b}).(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$
Örnek:

$(\sqrt{7} + \sqrt{3}).(\sqrt{7} - \sqrt{3}) = (\sqrt{7})^2 - (\sqrt{3})^2 = 7-3 = 4$

3)Bölme
Karekök içinde verilen sayılar bölünüp kök içine yazılır.Sadeleştirmeler yapılıp,mümkünse kök dışına çıkarılır.

a,b $\in R^+$ ve $b \neq 0$ ise $\sqrt{a}\,/\sqrt{b} = \sqrt{a/b}$ ve $a\sqrt{x}\,/\,b\sqrt{y} = \dfrac{a}{b}\sqrt{x/y}$ dır.

Örnekler:

- $\sqrt{32}\,/\sqrt{4} = \sqrt{32/4}$
- $\sqrt{2/5} : \sqrt{8/25} = \sqrt{2/5 : 8/25} = \sqrt{5/4} = \sqrt{5}/2$
- $3\sqrt{10}\,/\,2\sqrt{5} = \dfrac{3}{2}\sqrt{10/5} = \dfrac{3}{2}\sqrt{2}$

PAYDAYI RASYONEL YAPMA

Bölüm şeklindeki kareköklü bir ifadede, paydayı karekökten kurtarmaya, paydayı rasyonel yapmak denir.Paydayı kökten kurtarmak için ;pay ve paydayı ,paydanın eşleniği ile çarparız.

$\sqrt{a}$ nın eşleniği $\sqrt{a}$ ve $\sqrt{a}\,.\sqrt{a}$ =a dır.
$(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ nin eşleniği $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ ve $(\sqrt{a} + \sqrt{b}).(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$ dir.
$(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ nin eşleniği $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ dir.
$(\sqrt{a} - b)$ nin eşleniği $(\sqrt{a} + b)$ dir.

$\sqrt[3]{a}$ - $\sqrt[3]{b}$ nin eşleniği $\sqrt[3]{a}^2$ + $\sqrt[3]{ab}$ + $\sqrt[3]{b}^2$ dir.

$\sqrt[3]{a}$ + $\sqrt[3]{b}$ nin eşleniği $\sqrt[3]{a}^2$ - $\sqrt[3]{ab}$ + $\sqrt[3]{b}^2$ dir.

$\sqrt[n]{a}$ nin eşleniği $\sqrt[n]{a......}$ dir.

$\sqrt[n]{a}^m$ nin eşleniği $\sqrt[n]{a}^{n-m}$

1)Paydada $\sqrt{a}$ varsa:

Pay ve paydayı $\sqrt{a}$ ile çarparız.

Örnekler:

- 1/$\sqrt{2}$ = 1. $\sqrt{2}$ / $\sqrt{2}$. $\sqrt{2}$ = $\sqrt{2}$ /2
- 5/ $2\sqrt{5}$ = 5.$\sqrt{5}$ / $2\sqrt{5}$. $\sqrt{5}$ =$5\sqrt{5}$ /10 = $\sqrt{5}$ / 2

2)Paydada $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ varsa :

Pay ve paydayı $\sqrt{a}$ - $\sqrt{b}$ ile çarparız.

Örnek:

$$\frac{5}{2+\sqrt{3}} = \frac{5.(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3}).(2-\sqrt{3})}$$

$$= \frac{5.(2-\sqrt{3})}{2^2-(\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{10-5\sqrt{3}}{4-3}$$

$$=10-5\sqrt{3} = 5(2-\sqrt{3})$$

BAZI KURALLAR:

1) $\sqrt[m]{a}^n = a^{n/m}$

2) $\sqrt[m]{a}$ = x , x^m =a

3) $\sqrt[m]{a}\,.\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a.b}$

4) $\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a:b}$

5) $a\sqrt[n]{x} - b\sqrt[n]{x} + c\sqrt[n]{x}$ = (a – b + c)$\sqrt[n]{x}$

6) a > 0, b > 0, c > 0 m,n,k pozitif tam sayıdır.

$\sqrt[m]{a}^{\,2}$. b = a^n $\sqrt{b}$

7) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

8) $\sqrt[n]{a\sqrt[m]{b\sqrt[k]{c}}} = \sqrt[mkn]{a}$ ^{2}. b^{k}.c

9) $\sqrt[n]{x\sqrt[n]{x\sqrt[n]{x\ldots}}} = \sqrt[n-1]{x}$

10) $\sqrt[n]{x:\sqrt[n]{x:\sqrt[n]{x\ldots}}} = \sqrt[n+1]{x}$

11) $(\sqrt[n]{a})^n = a$

12) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a}$ ^{m}

13) a $\in$ R^{+} ise $a.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a}$ ^{n}. b

14) $\sqrt[n]{a\ldots.\sqrt[r]{a}}$ ^{p} = $\sqrt[n.r]{a\ldots\ldots x..a} = \sqrt[n.r]{a\ldots\ldots\ldots}$

15) $\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots..}}}$ =x ise x= $\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$

16) $\sqrt{a(a+1)+\sqrt{a(a+1)\sqrt{\ldots\ldots}}}$ =a+1

17) $\sqrt[p]{a\ldots\sqrt[q]{a\ldots.\sqrt[r]{a}}}$ ^{k} = $\sqrt[pqr]{a\ldots\ldots\ldots x.r} + k$