

Tam sayılar

Tam sayılar, [doğal sayılar](#) (0, 1, 2, ...) ve bunların [negatif](#) değerlerinden oluşur (-1, -2, -3, ...). (-0 [sayısı](#) 0 sayısına eşit olduğundan ayrı bir tam sayı olarak sayılmaz). [Matematikte](#) tam sayıların tümünü kapsayan [küme](#) genellikle \mathbb{Z} (ya da \mathbb{Z} şeklinde gösterilir). Burada "Z" harfi [Almanca](#) *Zahlen* (sayılar) sözcüğünün baş harfinden gelmektedir. Almancada "zahlen" çok önemli bir şeydir

Pozitif tam sayılar "0"dan uzaklaştıkça büyür. Negatif tam sayılar ise "0"dan uzaklaştıkça küçülür.

En büyük negatif tam sayı -1'dir. En küçük pozitif tam sayı ise +1'dir.

[Mutlak değer](#), sayının [başlangıç noktasına uzaklığını](#) ifade eder. Başlangıç noktasına eşit uzaklıktaki sayılar mutlak değerce eşittir. Mutlak değer içindeki her sayı, mutlak değer dışına pozitif olarak çıkar.

Tanım

Tamsayılar doğal sayıların bir [genişlemesidir](#). Her doğal sayının "-1" denen yeni bir [ögeyle](#) çarpılarak kümeye katılması olarak düşünülebilir. Tabii daha ayrıntılı olarak, doğal sayılar kümesinin [kartezyen çarpımı](#) üzerine tanımlanacak ve bir önceki cümlelerin işlevini görecek bir [denklik bağıntısı](#) bize tamsayıları inşa edecek.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinden seçtiğimiz (a, b) ve (c, d) öğeleri için " \sim " (tilde) [bağıntısı](#),

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$$

şeklinde tanımlansın ($a+d=b+c$ dememizin nedeni sezgisel olarak $a-b=c-d$ durumunu oluşturmaktır). Bu bağıntının denklik bağıntısı olduğu kolaylıkla görülebilir. Bu durumda bu bağıntının [denklik sınıfları](#) bizim **tamsayılar** diyeceğimiz öğeler olarak düşünülecektir. Her bir denklik sınıfı [temsilsisini](#),

$$\overline{(a, b)} = [a, b] = \{(a, b) \mid (a, b) \sim (c, d)\} = \{(a, b) \mid a + d = b + c\}$$

olarak tanımlamış oluruz. Aslında $[a, b]$ diye temsil ettiğimiz öge

$$[a, b] \equiv [a + 1, b + 1] \equiv \dots \equiv [a + k, b + k]$$

şeklinde. Aşağıda toplama ve çarpmayı işlerken bu, daha iyi anlaşılacaktır.

Bu noktada; bizim normalde, a ve b doğal sayı olmak üzere $a-b$ diye bildiğimiz tamsayı aslında $[a, b]$ kümesi olduğu görülebilir.

$$a - b \equiv [a, b]$$

Yâni bu bağıntının bize "eksi" (negatif) kavramını ifade ettiği söylenebilir. O halde, tamsayılar kümesi aşağıdaki [bölüm kümesidir](#):

$$\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) / \sim$$

Öyle ki $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ kümesi bir [halka](#) oluşturur.

TARİHİ

Tam sayılar kümesini pozitif tam sayılar, sıfır ve negatif tam sayılar diye üçe ayırmak gerek. Çünkü bunların her biri farklı tarihe sahipler. Pozitif tam sayıların ortaya çıkışı tam olarak bilinmiyor. 70 bin yıl önce pozitif tam sayıların, sayma sayıları olarak kullanıldığını gösteren belgeler var. İlk kullanımın saymak amacıyla olduğu anlaşılıyor. Güney Afrika'da bulunmuş olan bazı taşların üzerinde, yılın altı ayını, 28'er günlük ay takvimine göre sayan, çentikler atıldığı bulunmuştur. Bu çentiklerin sayma amacıyla kullanılmasını matematik olarak nitelemek zor. Sayıları ifade etmek için, her sayıya karşılık bir işaretin, bugünkü tabirimizle rakamların icadı matematiğin başlangıcı sayılabilir. Bu amaçla ilk yazılı kayıtlara M. Ö. 2000 yıllarında Babil'de rastlanıyor. 60 tabanına göre kurulmuş bu sayı sistemi negatif sayıları içinde taşımamakla beraber, kavram olarak sıfırı bulmak mümkün. Demek ki, sayı sistemi yazılı hale getirilinceye kadar, gelişmesi için de bir sürenin geçtiğini var sayarsak, ilk matematik ile ilgili yaklaşık başlangıç zamanı kestirimi bulmuş oluruz. Negatif sayıların ilk kayıtlarda görüldüğü zaman M.Ö. 100–50 dönemi Çin'dir. Hindistan'da Brahmagupta 628'de yayınladığı Brahmasphuta Siddhanta adlı eserinde borç anlamına gelmek üzere negatif sayılardan bahsettiği görülür. Orta Doğu'da muhasebe kayıtlarında borç veya zarar yerine negatif sayıların kullanılması da aynı zamanlara rastlamaktadır.. Avrupa'da negatif sayıları ilk Fibonacci'nin Liber Abaci'sinde görüyoruz. 1202 yılında yayınlanmış bu eser, Arap matematiğini Avrupa'ya taşımakta öncülük etmiştir. . Negatif tam sayıların Avrupa matematiğinde tam olarak yerleşmesi 18. yy.'yi bulur..ayrıca günümüzde hala işe yaramaktadır çok işe yardımcı olur.

Toplama

Tam sayılarda toplama yapılırken sayılar pozitifse toplanır sonuca yazılır. İkiside negatifse toplama yapılır fakat sonuç negatif olur. Zıtsa birbirinden çıkarılır. Büyüğün işareti verilir.

Toplamanın tıpkı doğal sayılarda olduğu gibi kalması, daha doğrusu bu toplamanın doğal sayılardaki toplamanın bir genişlemesi olması gerekir. Bu nedenle tamsayılar aşağıdaki [belitleri](#) sağlamalıdır: Herhangi a, b, c tamsayıları için

1. $a+0=a$ ([birim öge](#))
2. $a+b=b+a$ ([değişme](#))
3. $a+(b+c)=(a+b)+c$ ([birleşme](#))
4. $a+(-a)=0$ ([tersinir öge](#))

Buradaki son madde doğal sayılarda olmayan bir özelliktir ve bu özellik tamsayılar kümesini [öbek](#) (grup) yapar.

Toplamanın tam sayılardaki resmî tanımı

Eğer daha [öz](#) (pür) düşünecek olursak toplama işlemi,

$$[a, b] + [c, d] \equiv [a + c, b + d]$$

şeklinde tanımlanarak yukarıdaki denklik sınıflarının özellikleri sağladığı kolaylıkla görülebilir:

- Kümenin birim ögesi, yani sıfır ögesi $[c, c]$ olur:

$$[a, b] + [c, c] \equiv [a + c, b + c] \equiv [a, b]$$

- İşlem değişmeli olur:

$$[a, b] + [c, d] \equiv [c, d] + [a, b]$$

- Her ögenin tersi vardır:

$$\begin{aligned}[a, b] + [b, a] &\equiv [a + b, a + b] \equiv 0 \\ [a, b] &\equiv -[b, a]\end{aligned}$$

- İşlem birleşmelidir:

$$[a, b] + ([c, d] + [e, f]) \equiv ([a, b] + [c, d]) + [e, f]$$

Ayrıca,

$$\begin{aligned}1 &\equiv [a, a + 1] \\ -1 &\equiv [a + 1, a]\end{aligned}$$

gibi denklıklar de görülebilir.

Çarpma

Tam sayılarda çarpma işlemi yapılırken aynı işaretlilerin çarpımı pozitif farklı işaretlilerin çarpımı ise negatiftir. Bölme işlemindedey aynı çarpma kuralı uygulanır ve sayı aynı doğal sayılarda olduğu gibi bölünür. aynı işaretli iki tam sayı birbirine bölündüğünde sonuç pozitif, zıt işaretli iki tam sayı birbirine bölündüğünde ise sonuç negatiftir. tam sayıların sıfıra bölümü tanımsızdır. sıfırın tam sayılara bölümünde elde edilen sonuç ise sıfırdır.

Tamsayılarda [çarpma](#) işlemi doğal sayılardaki çarpmayla aynı özellikleri gösterir. Çarpma işlemi, "." imiyle gösterilir, ancak $a \cdot b$ yazmak yerine doğrudan ab yazmak gelenektendir. Bu maddede de öyle yapacağız.

Herhangi a, b, c tamsayıları için,

1. $a1 = a$ (birim öge)
2. $ab = ba$ (değişme)
3. $a(bc) = (ab)c$ (birleşme)

özellikleri sağlanır. Tamsayılarda çarpmaya göre [tersinir öge](#) yoktur.

Ayrıca toplama ile çarpmanın birbirleriyle olan ilişkisini gösteren [dağılma](#) özelliği de vardır:

- $a(b+c) = ab+ac$ (çarpmanın toplama üzerine dağılma ya da kısaca [soldan dağılma](#) özelliği)
- $(a+b)c = ac+bc$ (toplamanın çarpma üzerine dağılma ya da kısaca [sağdan dağılma](#) özelliği)

Toplamayla birlikte bu iki işlem tamsayıları [değişmeli halka](#) yapar.

Çarpmanın tamsayılardaki resmî tanımı

Çarpma, tıpkı yukarıda toplama için yapıldığı gibi, cebirsel olarak yapılabilir. Eğer çarpmayı,

$$[a, b][c, d] \equiv [ac + bd, ad + bc]$$

denklik bağıntısı ile tanımlarsak yukarıdaki özellikler sağlanmış olur. Bu tanım tek değerli bir [göndermedir](#). Bu sonuç bağıntıdan kolaylıkla kanıtlanabilir ve sonuç ortaya çıkar.

Çarpmanın tersini olarak bölme

Bölme özünde çarpmanın tersiniridir. Tamsayılarda bölme, her sayı için tanımlanmamıştır. Bu yüzden bölüm her zaman tamsayılar kümesinin bir ögesi olmayabilir. bu kadarmı....